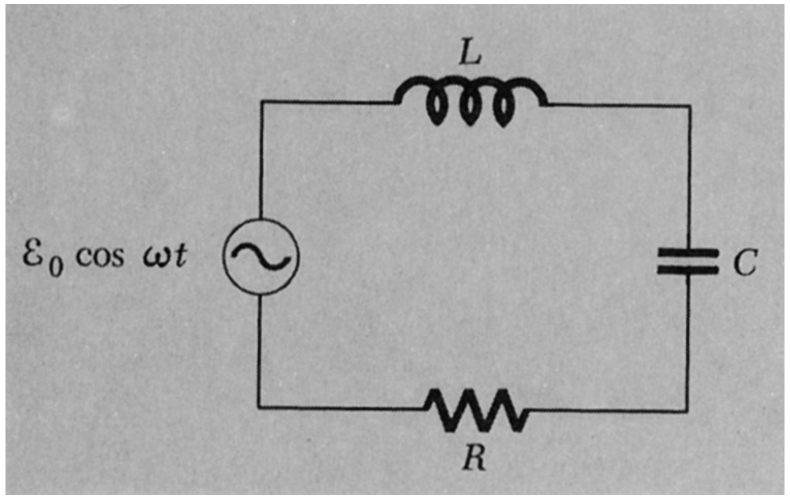
# Laboratório10:
# Circuito RLC - Ressonância

## Circuito RLC: ressonância




$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \epsilon_0\, cos(\Omega t)$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\Omega\epsilon_0\, sin(\Omega t)$$

**Solução geral:** $I(t) = I_h(t) + I_p(t)$

**Solução homogênea:** $L\frac{d^2I_h}{dt^2} + R\frac{dI_h}{dt} + \frac{I_h}{C} = 0$

$$I_h(t) = I_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi) \qquad \gamma = \frac{R}{2L} \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$I_h(t) \to 0$ para $t \to \infty \quad (t >> \frac{2L}{R}) \quad \Rightarrow \quad I(t) \approx I_p(t)$

Para *t >> 2L/R* só sobra a solução particular

**A solução particular satisfaz a equação:**

$$L\frac{d^2 I_p}{dt^2} + R\frac{dI_p}{dt} + \frac{I_p}{C} = \frac{d\epsilon}{dt} = -\Omega\epsilon_0\, sin(\Omega t)$$

**Ela é periódica, com período** $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ **.**

**Um truque matemático: Definimos** $\tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0\, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow \quad \epsilon(t) = Re\,[\,\tilde{\epsilon}\,]$

**Resolvemos a equação:** $$L\frac{d^2 \tilde{I}_p}{dt^2} + R\frac{d\tilde{I}_p}{dt} + \frac{\tilde{I}_p}{C} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = i\Omega\epsilon_0\, e^{i\Omega t}$$

**A solução desejada** $I_p(t) = Re\,[\,\tilde{I}_p(t)\,]$, pois $Re\,[\,\dfrac{d\tilde{\epsilon}}{dt}\,] = -\Omega\epsilon_0\, sin(\Omega t)$

**Tentamos a solução:** $\tilde{I}_p(t) = \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow$

$$\left(-\Omega^2 L + i\Omega R + \frac{1}{C}\right) \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t} = i\Omega \epsilon_0\, e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C}\right) \tilde{I}_0\, e^{i\Omega t} = \epsilon_0\, e^{i\Omega t} = \tilde{\epsilon}(t)$$

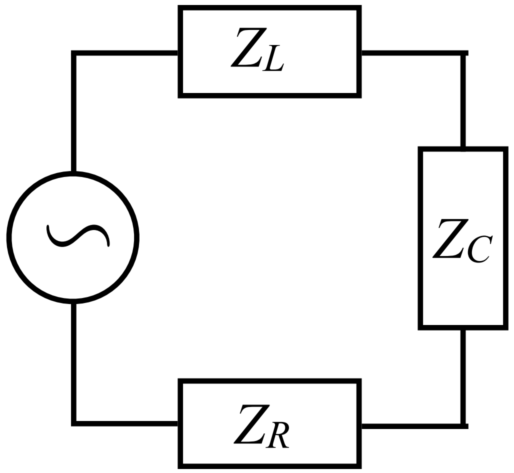
**Definimos a impedância** $Z = \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C}\right) = R + i\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)$

$Z = R + iX$ **onde a reatância** $X = \Omega L - \frac{1}{\Omega C} = X_L + X_C$

$X_L = \Omega L$ (reatância indutiva) $\qquad X_C = -\frac{1}{\Omega C}$ (reatância capacitiva)

Note que podemos escrever: $\quad Z = Z_R + Z_L + Z_C \quad \Rightarrow \quad \tilde{\epsilon} = Z\tilde{I}_p$

Como se fossem três “resistores" em série com “resistências"complexas




$$Z_L = i\Omega L\,; \quad X_L = \Omega L \quad \Rightarrow \boxed{\tilde{V}_L = Z_L\tilde{I}}$$

$$Z_R = R\,; \quad X_R = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\tilde{V}_R = Z_R\tilde{I}}$$

$$Z_C = -i\left(\frac{1}{\Omega C}\right)\,; \quad X_C = -\frac{1}{\Omega C} \quad \Rightarrow \boxed{\tilde{V}_C = Z_C\tilde{I}}$$

$\tilde{V}_R$ está em fase com $\tilde{I}$ ;

$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_L$ está defasado de $+\dfrac{\pi}{2}$ em relação a $\tilde{I}$ ;

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_C$ está defasado de $-\dfrac{\pi}{2}$ em relação a $\tilde{I}$

**Com essas definições a Eq. para a solução particular toma a seguinte forma:**

$$\Rightarrow \quad Z\tilde{I}_0\, e^{i\Omega t} = \epsilon_0\, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow \quad Z\tilde{I}_0 = \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{I}_0 = \frac{\epsilon_0}{Z}}$$

A impedância $Z$ pode ser vista como uma “resistência complexa”

$$Z = R + iX = |Z|e^{i\phi}; \qquad |Z| = \left(R^2 + X^2\right)^{1/2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}\right)$$

**Nossa solução** $\quad \tilde{I}_p(t) = \tilde{I}_0 e^{i\Omega t} = \dfrac{\epsilon_0}{Z} e^{i\Omega t} = \dfrac{\epsilon_0}{|Z|} e^{i(\Omega t - \phi)}$

$$\boxed{I_p(t) = Re\,[\tilde{I}_p(t)] = \frac{\epsilon_0}{|Z|}\cos\left(\Omega t - \phi\right) = A\cos(\Omega t - \phi)}$$

$$\boxed{I_p(t) = Re\,[\tilde{I}_p(t)] = \frac{\epsilon_0}{|Z|}\cos\left(\Omega t - \phi\right) = A\cos(\Omega t - \phi)}$$

**Note que:**

- $I_p(t)$ está defasado em relação a fonte de tensão $\epsilon(t) = \epsilon_0\,\cos(\Omega t)$

- Tanto a amplitude da corrente quanto a defasagem dependem de $\Omega$

$$A = A(\Omega) \qquad \phi = \phi(\Omega)$$

- $A(\Omega)$ tem um máximo

$$A(\Omega) = \frac{\epsilon_0}{|Z|} = \epsilon_0\,[R^2 + (X_L + X_C)^2]^{-1/2}$$

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{\epsilon_0}{2}\,[R^2 + (X_L + X_C)^2]^{-3/2}\,2(X_L + X_C)\,(\frac{dX_L}{d\Omega} + \frac{dX_C}{d\Omega})$$

Tendo em vista que $\dfrac{dX_L}{d\Omega} = L; \qquad \dfrac{dX_C}{d\Omega} = \dfrac{1}{\Omega^2 C}$

Ambos são positivos

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L + X_C = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L = -X_C$$

- A posição do máximo é dada por

$$\Omega L = \frac{1}{\Omega C} \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

**Condicões de Ressonância**

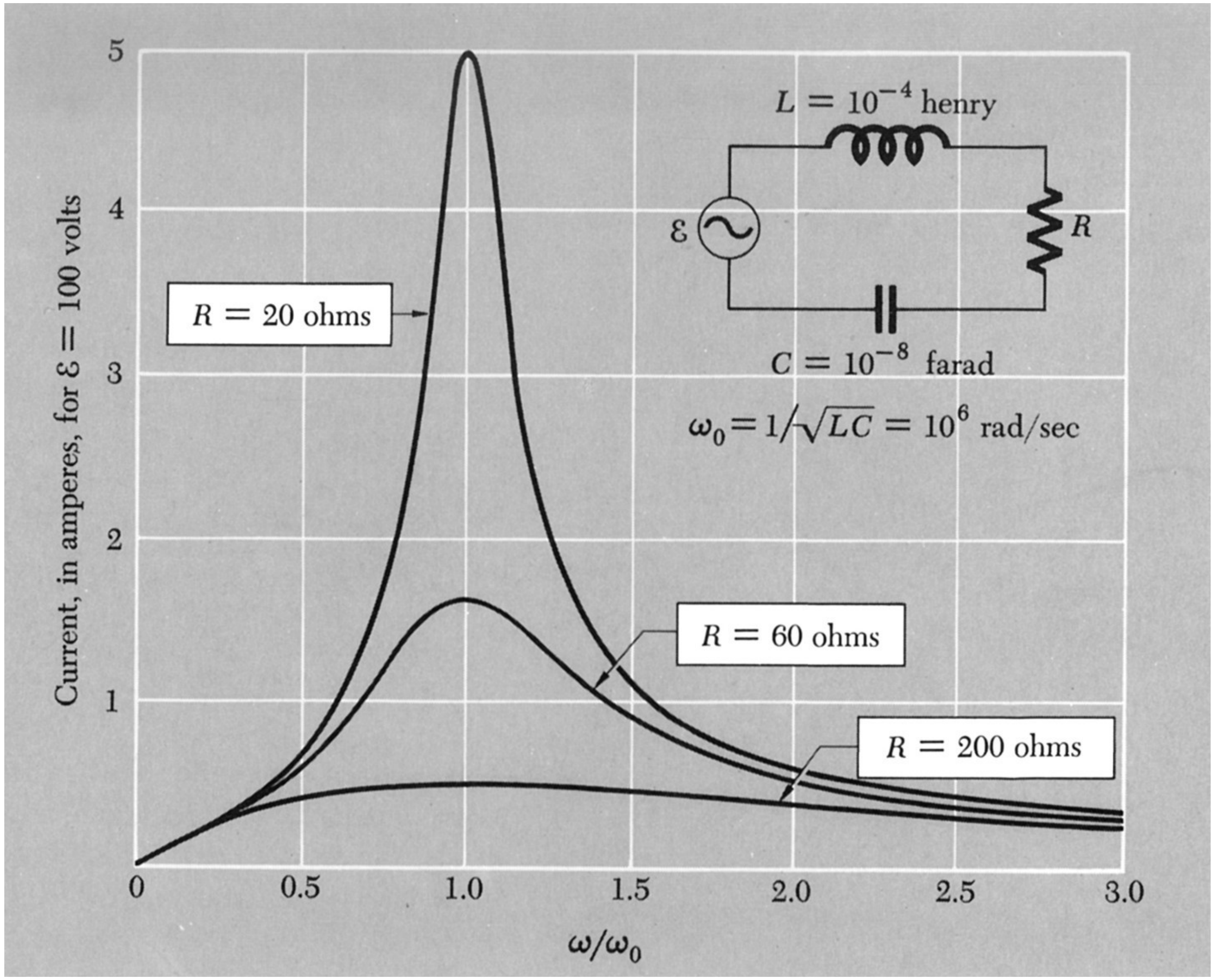
- Para $\Omega = \omega_0$

$$\boxed{A(\omega_0) = \frac{\epsilon_0}{R}} \qquad \boxed{\phi(\omega_0) = 0} \quad \Rightarrow \quad I(\omega_0) = \frac{\epsilon_0}{R}\cos(\omega_0 t)$$

Quanto menor *R* maior *A*

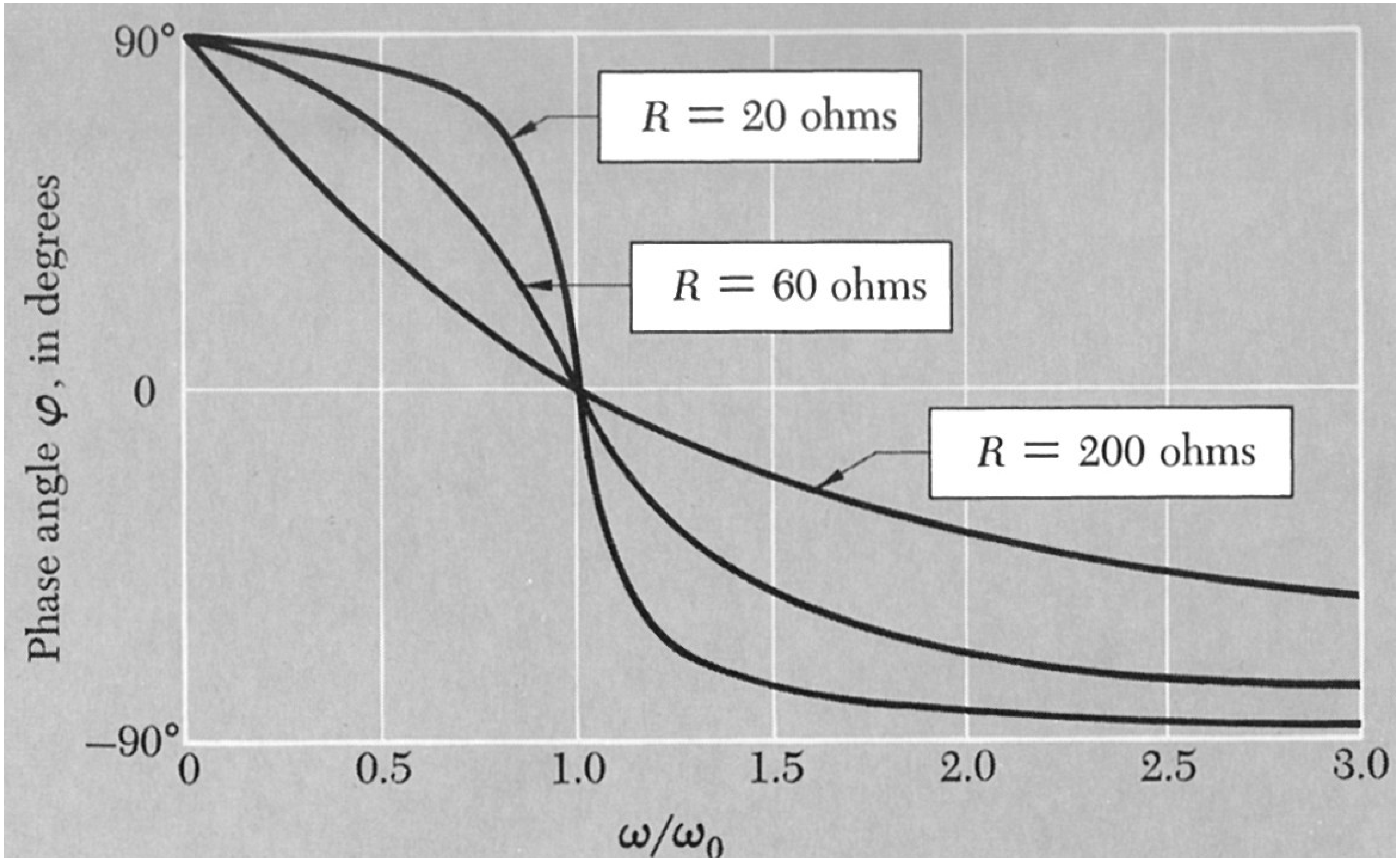
$$X_L = -X_C \quad \Rightarrow \quad V_L = -V_C\,; \qquad \epsilon(t) = V_R(t) = \epsilon_0\cos(\omega_0 t)$$

# A amplitude da corrente é máxima na ressonância




Quanto menor for o valor da resistência $R$, mais alto será o pico

Ângulo de fase em graus




A defasagem é nula na ressonância

# Procedimento Experimental

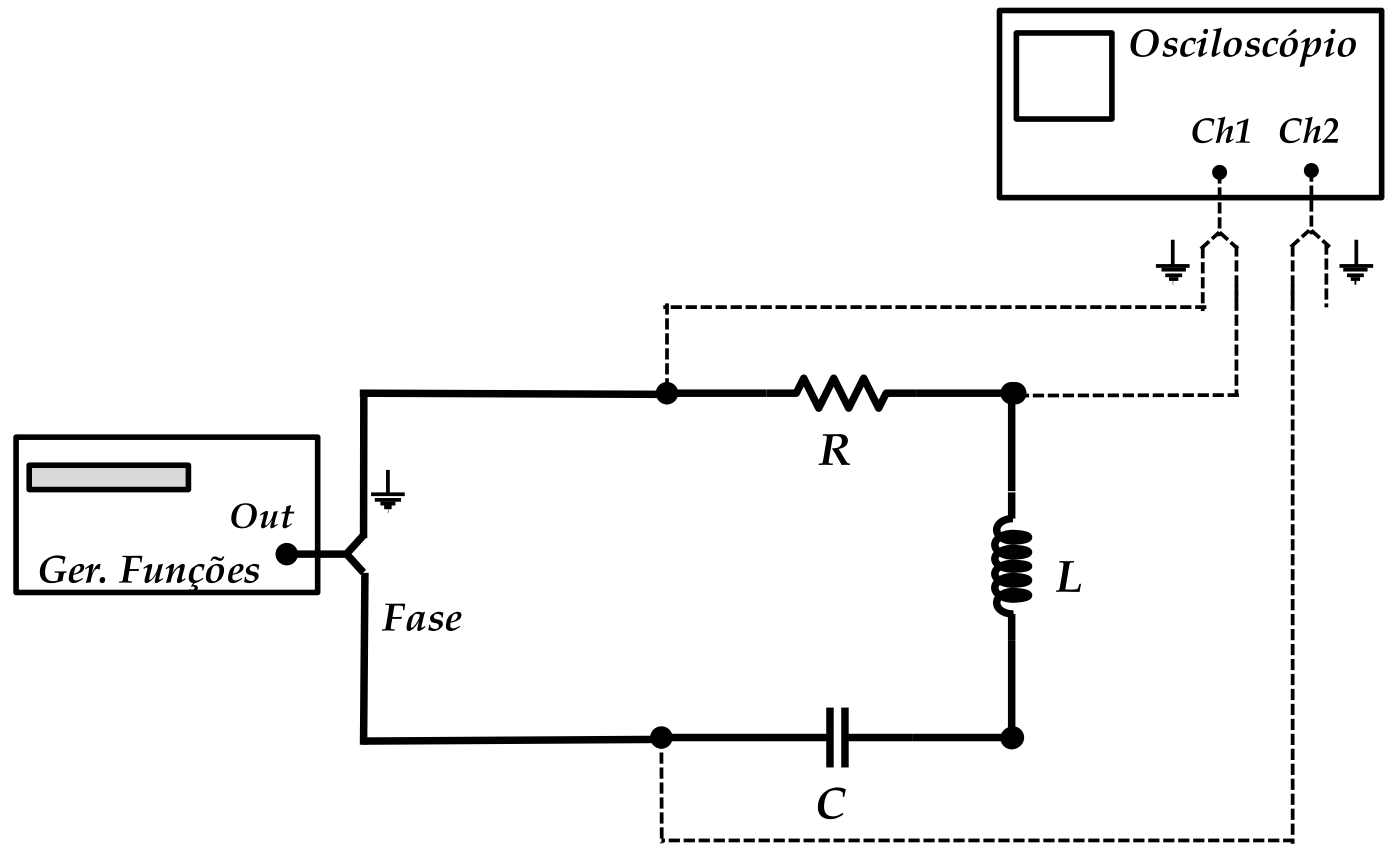



**Figura 10.2**. Montagem para medição das ddp´s da fonte e do resistor.

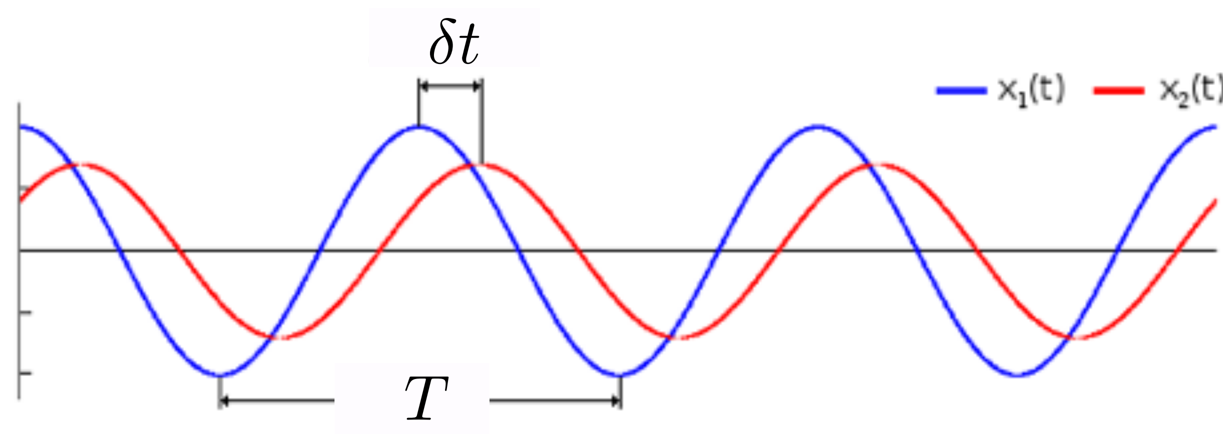
1. Utilize o kit para montar o circuito da figura escolhendo:

$$R = 100\Omega \qquad L = 8.2\text{mH} \qquad C = 2.2\mu\text{F}$$

2. Ajuste a amplitude da tensão senoidal para 6.0 (ou 4.0) Volts.

3. Ajuste o período da onda senoidal para T = 0.4ms

4. Meça a defasagem entre a tensão da fonte $\epsilon$ e a tensão $V_R$ no resistor.




$$\boxed{\begin{array}{l} T \to 2\pi \\ \delta t \to \phi \end{array} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{2\pi\delta t}{T}}$$

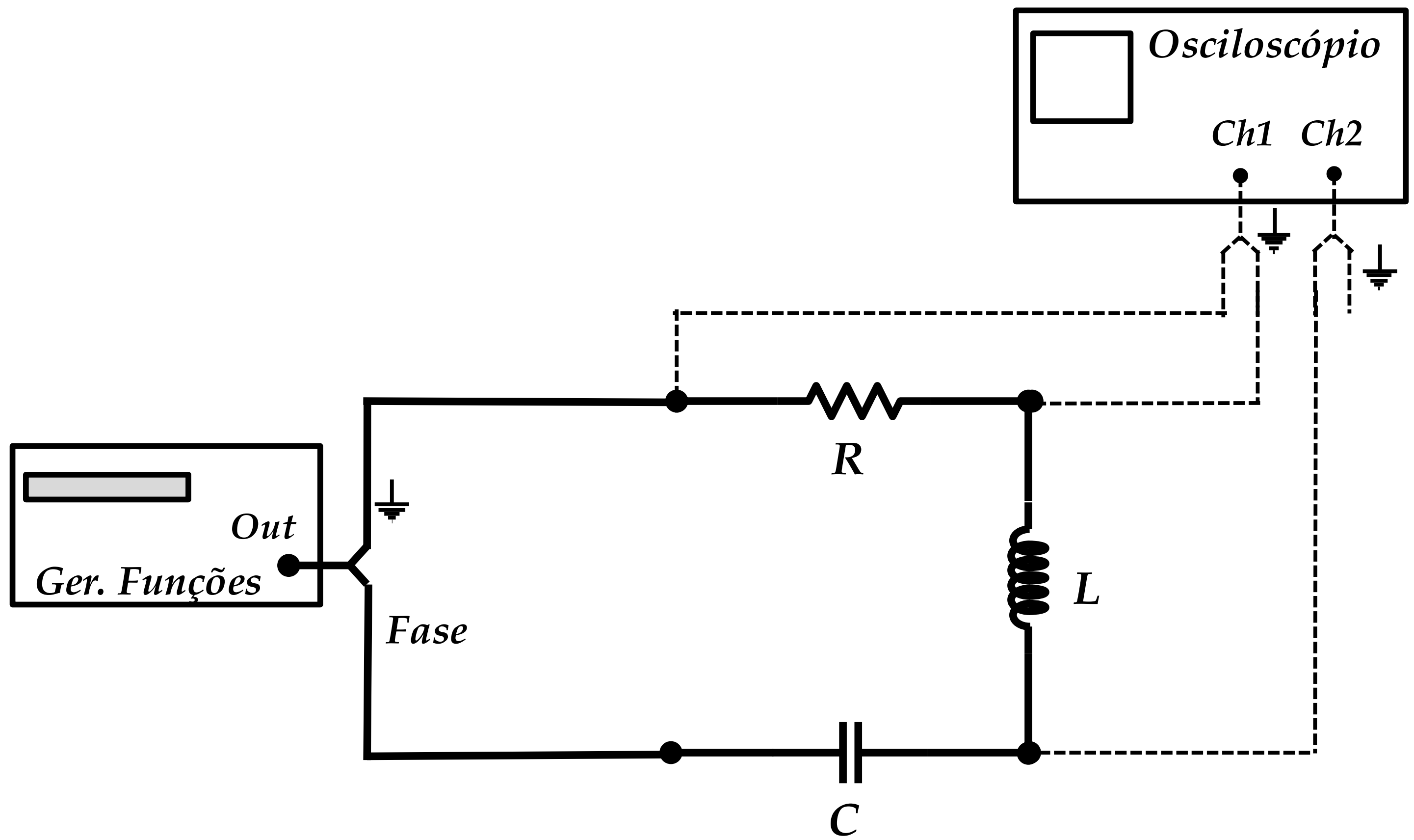
5. Utilizando a equação 10.5 da apostila, calcule a defasagem entre $\epsilon$ e $V_R$, e Compare com o resultado obtido no item anterior, levando em conta as incertezas das grandezas envolvidas.

6. Com os valores de L e C utilizados, calcule a freqüência de ressonância do circuito.

$$f_r = \omega_r/2\pi = 1/(2\pi\sqrt{LC})$$

7. Variando a freqüência no gerador de funções, meça a freqüência de ressonância. Estime a incerteza desta medida. Explicite o método utilizado na sua medição.

Monitore agora as tensões $V_R$ e $V_L$ simultaneamente de acordo com o esquema:




8. Teoricamente, qual o valor da defasagem entre a tensão $V_R$ e $V_L$?

9. Meça essa defasagem e verifique se está compatível com o resultado do item anterior.

10. A defasagem entre $V_R$ e $V_L$ depende da freqüência da fonte de tensão externa? Verifique a sua resposta variando a freqüência da fonte.